

فصل ۳ متغیرهای تصادفی و تابع احتمال

۳-۱-۳ متغیر تصادفی

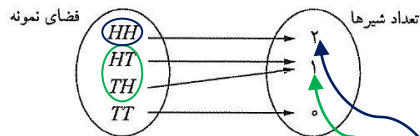


متغیری که مقدار عددی‌اش به وسیله‌ی برآمد یک آزمایش تصادفی تعیین می‌شود، «متغیر تصادفی» نامیده می‌شود. متغیر بودن این مشخصه به این علت است که از هر برآمد به برآمد دیگر، مقدار آن تغییر می‌کند. تصادفی بودن آن به این علت است که تغییرات آن به عوامل تصادفی که خارج از کنترل است، بستگی دارد. متغیر تصادفی را با حروف بزرگ X و Y و مقادیر خاصی را که این متغیر می‌تواند بپذیرد، با حروف کوچک x و y نشان می‌دهند.

مثال ۱: آزمایش پرتاب دو سکه‌ی سالم را در نظر بگیرید، فضای نمونه‌ای این آزمایش چنین است:

$$S = \{HH, HT, TH, TT\}$$

می‌توانیم متغیر تصادفی X را تعداد شیرهایی فرض کنیم که رخ می‌دهند. X می‌تواند مقادیر 0 ، 1 و 2 را به خود بگیرد. به اولین عضو نمایش داده شده در S عدد 2 ، به دومین عضو عدد 1 ، به سومین عضو عدد 1 و به چهارمین عضو عدد 0 اختصاص می‌دهیم.



بنابراین، متغیر تصادفی برخلاف اسمش، متغیر نیست بلکه تابعی است که روی فضای نمونه‌ای تعریف می‌شود و هر یک از مقادیر آن متناظر با (ک) یا چند عضو از اعضای فضای نمونه است.

۳-۱-۱ متغیر تصادفی گسسته

متغیری را گویند که **تمام مقادیر ممکن آن، مجموعه‌ی محدود یا نامحدود، شمارش‌پذیر** باشد. مثال‌هایی از این نوع متغیرها چنین‌اند:

– تعداد شماره‌های اشتباهی که یک تلفنچی در یک نوبت کاری می‌گیرد (محدود).

۲-۳. تعداد پرتاب‌های متوالی یک تاس تا ظاهر شدن عدد ۲ (نامحدود).

۳-۱-۲ متغیر تصادفی پیوسته

متغیری را گویند که «جمع مقادیر ممکن آن» مجموعه‌ی تمامی اعداد حقیقی یا فاصله‌هایی از مجموعه‌ی اعداد حقیقی باشد، یا به گفته‌ی بهتر مجموعه‌ی نظیر آن «شمارش‌ناپذیر» باشد. مثال‌هایی از این نوع متغیرها چنین‌اند: مقدار آب مصرفی یک خانوار در یک ماه.
مدت زمان لازم برای حل یک مسأله‌ی آمار.

۳-۲ تابع احتمال



به تابعی که بتوان با استفاده از آن احتمال هر یک از مقادیر ممکن متغیر تصادفی را مشخص کرد «تابع احتمال» گفته می‌شود. در مورد متغیرهای گسسته و پیوسته تابع احتمال به‌طور متفاوت تعریف می‌شود.

۳-۲-۱ تابع احتمال گسسته

برای متغیرهای تصادفی گسسته، تابعی به‌عنوان «تابع جرم احتمال» و یا به اختصار «تابع احتمال» وجود دارد. تابع احتمال یک متغیر تصادفی گسسته‌ی X ، تابعی است مانند $f(x_i) = P(X = x_i)$ که در شرط‌های زیر صادق است:

$$۱) f(x_i) \geq 0, \quad ۲) \sum_{i=1}^n f(x_i) = 1$$

تابع احتمال گسسته را می‌توان به‌صورت یک فرمول یک جدول یا یک نمودار نشان داد.

۱) نمایش تابع احتمال به‌صورت جدول: هرگاه متغیر تصادفی X تنها تعداد کمی مقدار متمایز اختیار کند، بهتر است توزیع احتمال را به‌صورت جدولی شبیه جدول زیر نشان دهیم.

x_i	x_1	x_2	...	x_n
$f(x_i)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	...	$f(x_n)$

۲) نمایش تابع احتمال به صورت فرمول: تابع احتمال را اغلب می‌توان به وسیله‌ی فرمولی برای تابع احتمال $f(x)$ و دامنه‌ی مقادیر ممکن X نشان داد.

۳) نمایش تابع احتمال به صورت نمودار بافت‌نگار: مقادیر متغیر تصادفی X روی محور افقی مشخص می‌شوند. به ازای هر مقدار x ، مستطیلی عمودی رسم می‌شود که وسط عرض آن نقطه‌ی x و مساحتش برابر با احتمال $f(x)$ است.

مثال ۲ آیا تابع زیر می‌تواند به عنوان تابع احتمال یک متغیر تصادفی به کار رود؟ چرا؟

$$f(x) = \frac{3}{4x!(3-x)!}, \quad x = 0, 1, 2, 3$$

حل. بلی؛ زیرا به ازای مقادیر ممکن x ، $f(x)$ غیر منفی است و هم چنین جمع احتمالات نیز برابر یک است:

$$\sum f(x) = f(0) + f(1) + f(2) + f(3) = \frac{3}{4} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{4} = 1$$

مثال ۳ یک سکه‌ی نازیب را ۳ بار پرتاب می‌کنیم. متغیر تصادفی X عبارت است از تعداد شیرهای ظاهر شده، جدول توزیع احتمال X را به دست آورید.

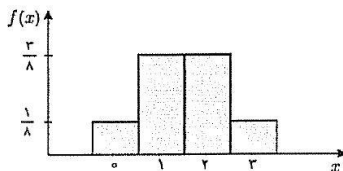
حل. فضای نمونه‌ای این آزمایش $S = \{HHH, HHT, HTH, THH, TTH, THT, HTT, TTT\}$ است. X می‌تواند مقادیر ۰، ۱، ۲، ۳ را به خود بگیرد. بنابراین:

$$P(X=0) = \frac{1}{8}, \quad P(X=1) = \frac{3}{8}, \quad P(X=2) = \frac{3}{8}, \quad P(X=3) = \frac{1}{8}$$

پس جدول توزیع احتمال X به صورت زیر است:

x_i	0	1	2	3
$f(x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

مثال ۵ نمودار بافت‌نگار توزیع احتمال X در مثال ۴ را رسم کنید.



ارتفاع هر مستطیل برابر احتمال این است که X مقداری متناظر با طول نقطه‌ی وسط قاعده‌ی آن اختیار کند. با نمایش بازه‌ی از ۰٫۵- تا ۰٫۵ با ۰، بازه‌ی از ۰٫۵ تا ۱٫۵ با ۱، بازه‌ی از ۱٫۵ تا ۲٫۵ با ۲ و بازه‌ی از ۲٫۵ تا ۳٫۵ با ۳، مقادیر متغیر

تصادفی گسسته‌ی مفروض را به اصطلاح روی مقیاسی پیوسته گسترده‌ایم. چون هر مستطیل نمودار بافت‌نگار شکل فوق، دارای پهنای واحد است، می‌توانیم بگوییم مساحت‌های مستطیل‌ها، به جای ارتفاع‌های آن‌ها، برابر احتمال‌های متناظرند.

مثال ۶ متغیر تصادفی X ، با تابع احتمال زیر مفروض است.

x	-۲	۰	۱	۲
$f(x)$	۰٫۲	۰٫۱	۰٫۵	۰٫۲

احتمال این‌که $|X| = ۲$ ، چقدر است؟

حل.

$$P(|X| = ۲) = P(X = -۲, ۲) = P(X = ۲) + P(X = -۲) = ۰٫۲ + ۰٫۲ = ۰٫۴$$

نکته ۲ هرگاه تمام احتمال در نقطه $X = c$ متمرکز شده باشد، یعنی داشته باشیم $P(X = c) = ۱$ در این صورت X را یک «متغیر تصادفی ثابت یا غیر واقعی یا تباهیده شده» می‌نامند.

نکته ۳ فرض کنید متغیر تصادفی گسسته‌ی X دارای تابع احتمال $P(X = x)$ باشد. اگر تابعی از متغیر تصادفی را $y = g(x)$ معرفی کنیم، برای مشخص کردن تابع احتمال متغیر تصادفی Y ، باید ابتدا مقادیر را مشخص کرده، آن‌گاه احتمال‌های y که همان $P(Y = y)$ است را مشخص کنیم. در صورتی‌که مقداری که Y اختیار می‌کند با یک‌دیگر متفاوت باشند، تابع احتمال $P(Y = y)$ ، همان تابع احتمال $P(X = x)$ می‌باشد. اما اگر حداقل ۲ مقدار از x ها، مقادیر Y یکسان تولید کنند، برای تابع احتمال Y باید احتمال‌های x ها را با یک‌دیگر جمع کنیم.

مثال ۷ فرض کنید متغیر تصادفی X دارای تابع احتمال زیر باشد، تابع احتمال $y = x^2$ را بیابید.

x	۰	۱	۲	۳
$f(x)$	۰٫۳	۰٫۲	۰٫۱	۰٫۴

حل. با توجه به $y = x^2$ ، مقادیر اختیار شده توسط Y را معلوم می‌کنیم:

$$\begin{aligned} x = 0; y = 0 & \quad , \quad x = 1; y = 1 \\ x = 2; y = 2^2 = 4 & \quad , \quad x = 3; y = 3^2 = 9 \end{aligned}$$

مقادیر به‌دست آمده با یک‌دیگر برابر نیستند. پس تابع احتمال $y = x^2$ به‌صورت زیر است:

y	۰	۱	۴	۹
$f(y)$	۰٫۳	۰٫۲	۰٫۱	۰٫۴

مثال ۸ فرض کنید متغیر تصادفی X دارای تابع احتمال زیر باشد. در این صورت تابع احتمال $y = x^2$ را بیابید.

x	-1	0	1	2
$g(x)$	$0,1$	$0,3$	$0,4$	$0,2$

حل. با توجه به $y = x^2$ ، مقادیر اختیار شده توسط Y را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned} x = -1; y = (-1)^2 = 1, & \quad x = 0; y = 0 \\ x = 1; y = 1^2 = 1, & \quad x = 2; y = 2^2 = 4 \end{aligned}$$

توجه کنید که به ازای $x = 1$ و $x = -1$ مقدار Y یک مقدار اختیار کرده است. پس در این نقطه باید احتمال‌های $x = 1$ و $x = -1$ را با هم جمع کنیم. پس تابع احتمال $y = x^2$ به صورت زیر است:

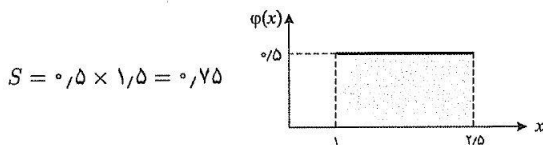
y	1	0	4
$g(x)$	$0,1 + 0,4 = 0,5$	$0,3$	$0,2$

۳-۲-۲ تابع احتمال پیوسته

برای متغیرهای تصادفی پیوسته، تابعی به عنوان «تابع چگالی احتمال» و یا به اختصار «تابع چگالی» وجود دارد. تابع چگالی یک متغیر تصادفی پیوسته X ، تابعی است مانند $\varphi(x)$ که در شرط‌های زیر صادق است:

$$1) \varphi(x) \geq 0, \quad 2) \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx = 1$$

برای یک تابع چگالی که نمودار یک متغیر تصادفی پیوسته است ارتباطی بین مساحت و احتمال وجود دارد. در شکل زیر، یافتن احتمال یک مقدار بین 1 تا $2,5$ می‌تواند با محاسبه مساحت هاشور خورده‌ی مستطیل شکل به ابعاد $1,5$ و $0,5$ انجام شود:



یعنی احتمال این‌که متغیر تصادفی X ، عددی بین 1 تا $2,5$ باشد، برابر $0,75$ است.

مثال ۹ آیا $\varphi(x) = \begin{cases} \frac{x}{4} & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$ به عنوان تابع احتمال یک متغیر تصادفی به کار می‌رود؟ چرا؟
 حل. خیر، چون جمع احتمالات برابر ۱ نیست.

$$\int_0^1 \frac{x}{4} dx = \left. \frac{x^2}{8} \right|_0^1 = \frac{1}{8} - 0 = \frac{1}{8}$$

مثال ۱۰ متغیر تصادفی X دارای تابع احتمال زیر است:

$$\varphi(x) = \begin{cases} kx^2 & 0 < x < 4 \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

مقدار k را پیدا کنید.
 حل.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx = 1; \int_0^4 kx^2 dx = 1; \left. \frac{k}{3} x^3 \right|_0^4 = 1; \frac{k}{3} (64 - 0) = 1; k = \frac{3}{64}$$

نکته ۴ اگر $\varphi(x)$ نشان دهنده‌ی تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی X باشد، آن‌گاه **احتمال این که X بین a و b قرار گیرد، برابر با مساحت زیر منحنی تابع چگالی آن در بازه‌ی $[a, b]$ است:**

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b \varphi(x) dx$$

با قراردادن $a = b$ ، به دست می‌آوریم:

$$P(X = a) = \int_a^a \varphi(x) dx = 0$$

یعنی برای هر عدد حقیقی a ، $P(X = a) = 0$. پس احتمال این‌که متغیر تصادفی پیوسته‌ی X مقداری معین را قبول کند، برابر صفر است. بنابراین احتمال قرارگرفتن X در یک بازه به دو انتهای آن بازه بستگی ندارد.
 پس:

$$P(a \leq X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b) = P(a < X < b) = \int_a^b \varphi(x) dx$$

مثال ۱۱ متغیر تصادفی X با تابع چگالی احتمال زیر مفروض است:

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}x + \frac{2}{3} & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

مطلوبست $P(0.5 \leq X \leq 1)$.

حل.

$$P(0.5 \leq X \leq 1) = \int_{0.5}^1 \left(\frac{2}{3}x + \frac{2}{3} \right) dx = \left(\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x \right) \Big|_{0.5}^1 = \frac{7}{12}$$

مثال ۱۲ اگر $0 \leq x \leq 5$ و $\varphi(x) = 0.2$ مقدار x_0 را چنان بیابید که $P(X \leq x_0) = 0.6$.

حل.

$$P(X \leq x_0) = 0.6; \int_0^{x_0} 0.2 dx = 0.6; 0.2x \Big|_0^{x_0} = 0.6; 0.2x_0 = 0.6; x_0 = 3$$

مثال ۱۳ عمر مفید (به روز) یک دارو، متغیر تصادفی X با چگالی احتمال زیر است:

$$\varphi(x) = 20000(x + 100)^{-2}, \quad x > 0$$

احتمال این که دارو دست کم، به مدت ۲۰۰ روز مؤثر باشد را محاسبه کنید.

حل.

$$\begin{aligned} P(X \geq 200) &= \int_{200}^{+\infty} 20000(x + 100)^{-2} dx = \frac{-20000}{2} (x + 100)^{-2} \Big|_{200}^{+\infty} \\ &= -\frac{10000}{(x + 100)^2} \Big|_{200}^{+\infty} = 0 - \left(-\frac{10000}{300^2} \right) = \frac{1}{9} \end{aligned}$$

۳-۳ تابع توزیع (تابع توزیع تجمعی)



«تابع توزیع»، تابعی است که به ازای جميع مقادیر ممکن متغیر تصادفی X ، احتمال وقوع مقداری کوچک تر یا برابر با x را نشان می دهد. تابع توزیع یک متغیر تصادفی (گسسته یا پیوسته) X را به صورت زیر نشان می دهند:

$$F(x) = P(X \leq x)$$

(۱) اگر X یک متغیر تصادفی گسسته با تابع احتمال $f(x)$ باشد، آن‌گاه:

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{t \leq x} f(t)$$

(۲) اگر X یک متغیر تصادفی پیوسته با تابع چگالی $\varphi(x)$ باشد، آن‌گاه:

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x \varphi(t) dt$$

در هر دو حالت، F یک تابع صعودی یکنوا خواهد بود.

مثال ۱۵ تابع احتمال زیر را در نظر بگیرید:

x	۱	۲	۳
$f(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

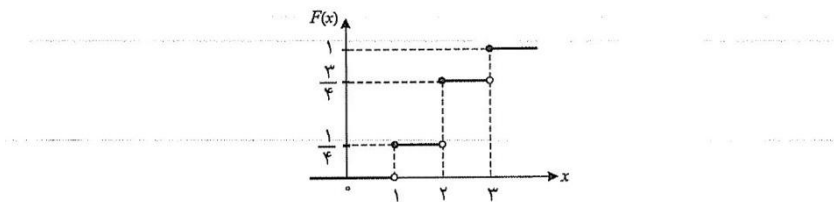
تابع احتمال گسسته

تابع توزیع متغیر تصادفی X را به دست آورید و نمودار آن را رسم کنید.

حل.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ \frac{1}{4} & 1 \leq x < 2 \\ \frac{1}{4} + \frac{1}{2} & 2 \leq x < 3 \\ 1 & x \geq 3 \end{cases} ; \quad \begin{array}{c|ccc} x & 1 & 2 & 3 \\ \hline F(x) & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 1 \end{array}$$

بنابراین:



نتیجه: نمودار تابع توزیع متغیر تصادفی گسسته، به صورت پله‌ای است.

مثال ۱۶ شرکت بیمه این اطلاعات را که مربوط به تعداد تصادفات ۵۰ روز یکی از مناطق شهری است، جمع‌آوری کرده است:

تعداد تصادفات	تعداد روزها
۰	۱۰
۱	۲۰
۲	۸
۳	۷
۴	۵
جمع	۵۰

(۱) تابع احتمال را تعیین کنید.

(۲) تابع توزیع را تعیین کنید.

(۳) احتمال این‌که در یک روز کم‌تر از ۳ تصادف رخ داده باشد، چقدر است؟

حل.

(۱)

تابع احتمال گسسته

x	۰	۱	۲	۳	۴
$f(x)$	۰٫۲۰	۰٫۴۰	۰٫۱۶	۰٫۱۴	۰٫۱۰

(۲)

x	۰	۱	۲	۳	۴
$F(x)$	۰٫۲۰	۰٫۶۰	۰٫۷۶	۰٫۹۰	۱

(۳)

$$P(X < 3) = F(2) = 0,76$$

مثال ۱۷: متغیر تصادفی پیوسته X ، دارای تابع چگالی به صورت زیر است:

$$\varphi(x) = 2(1-x) \quad 0 < x < 1$$

تابع چگالی پیوسته

تابع توزیع متغیر تصادفی X را بیابید.
حل.

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x \varphi(t) dt$$

$$F(x) = \int_0^x 2(1-t) dt = - (1-t)^2 \Big|_0^x = 1 - (1-x)^2$$

و لذا تابع توزیع را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - (1-x)^2 & 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$

۳-۳-۱ ویژگی‌های تابع توزیع

(۱) تابع توزیع، کمیتی غیرمنفی است، یعنی به ازای هر $x \in \mathbb{R}$:

$$F(x) \geq 0$$

(۲) برای هر $x \in \mathbb{R}$ ، همواره:

$$0 \leq F(x) \leq 1$$

(۳) تابع توزیع، تابعی غیر نزولی است، یعنی برای هر $a < b$:

$$F(a) \leq F(b)$$

(۴) همواره:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$$

(۵) تابع توزیع همواره از سمت راست پیوسته است:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} F(x) = F(a)$$

نکته ۶ با استفاده از تابع توزیع متغیر تصادفی X ، یعنی F به بسیاری از سؤالات احتمالی مربوط به X می‌توان پاسخ گفت. مثلاً برای محاسبه $P(X > a)$ ، توجه کنید که $P(X > a) = 1 - P(X \leq a)$ ، بنابراین $P(X > a) = 1 - F(a)$ می‌توان به آسانی حالت‌های دیگر را نیز ثابت کرد و جدول زیر را نتیجه گرفت.

احتمال پیشامد برحسب X	پیشامد مربوط به X	احتمال پیشامد برحسب F	پیشامد مربوط به X	احتمال پیشامد برحسب F
$F(b) - F(a)$	$a < X \leq b$	$F(a)$	$X \leq a$	
$f(b^-) - F(a)$	$a < X < b$	$1 - F(a)$	$X > a$	
$F(b) - F(a^-)$	$a \leq X \leq b$	$F(a^-)$	$X < a$	
$F(b^-) - F(a^-)$	$a \leq X < b$	$1 - F(a^-)$	$X \geq a$	
		$F(a) - F(a^-)$	$X = a$	

مثال ۱۸ اگر تابع توزیع احتمال برای متغیر تصادفی پیوسته‌ی X به‌صورت زیر باشد:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 2 \\ \frac{x-2}{8} & 2 < x \leq 10 \\ 1 & x > 10 \end{cases}$$

احتمال این‌که X مقداری در فاصله‌ی $(2, 8)$ اختیار کند، چقدر است؟
حل.

$$P(2 < X < 8) = F(8^-) - F(2) = \left(\frac{8-2}{8}\right) - 0 = 0.75$$

نکته ۷ اگر $F(x)$ تابع توزیع تجمعی یک متغیر تصادفی باشد، مشتق آن همان تابع چگالی احتمال، $\varphi(x)$ است و بالعکس، یعنی اگر $\varphi(x)$ تابع چگالی احتمال یک متغیر تصادفی باشد، انتگرال آن همان تابع توزیع تجمعی، $F(x)$ خواهد بود.

$$\text{تابع توزیع} \xrightarrow[\text{مشتق}]{\text{انتگرال}} \text{تابع چگالی}$$

مثال ۲۰ تابع توزیع متغیر تصادفی X به‌صورت زیر بیان شده است:

$$F(x) = 1 - \frac{4}{x^2}, \quad x > 2$$

تابع چگالی احتمال X را به‌دست آورید.
حل.

$$\varphi(x) = F'(x); \quad \varphi(x) = \frac{8}{x^3}, \quad x > 2$$

→ mathematical Expectation

۳-۴ امید ریاضی



امید ریاضی مفهوم اساسی در مطالعه‌ی توابع احتمال است. امید ریاضی متغیر تصادفی X را با $E(X)$ نشان داده و به این صورت تعریف می‌کنیم: